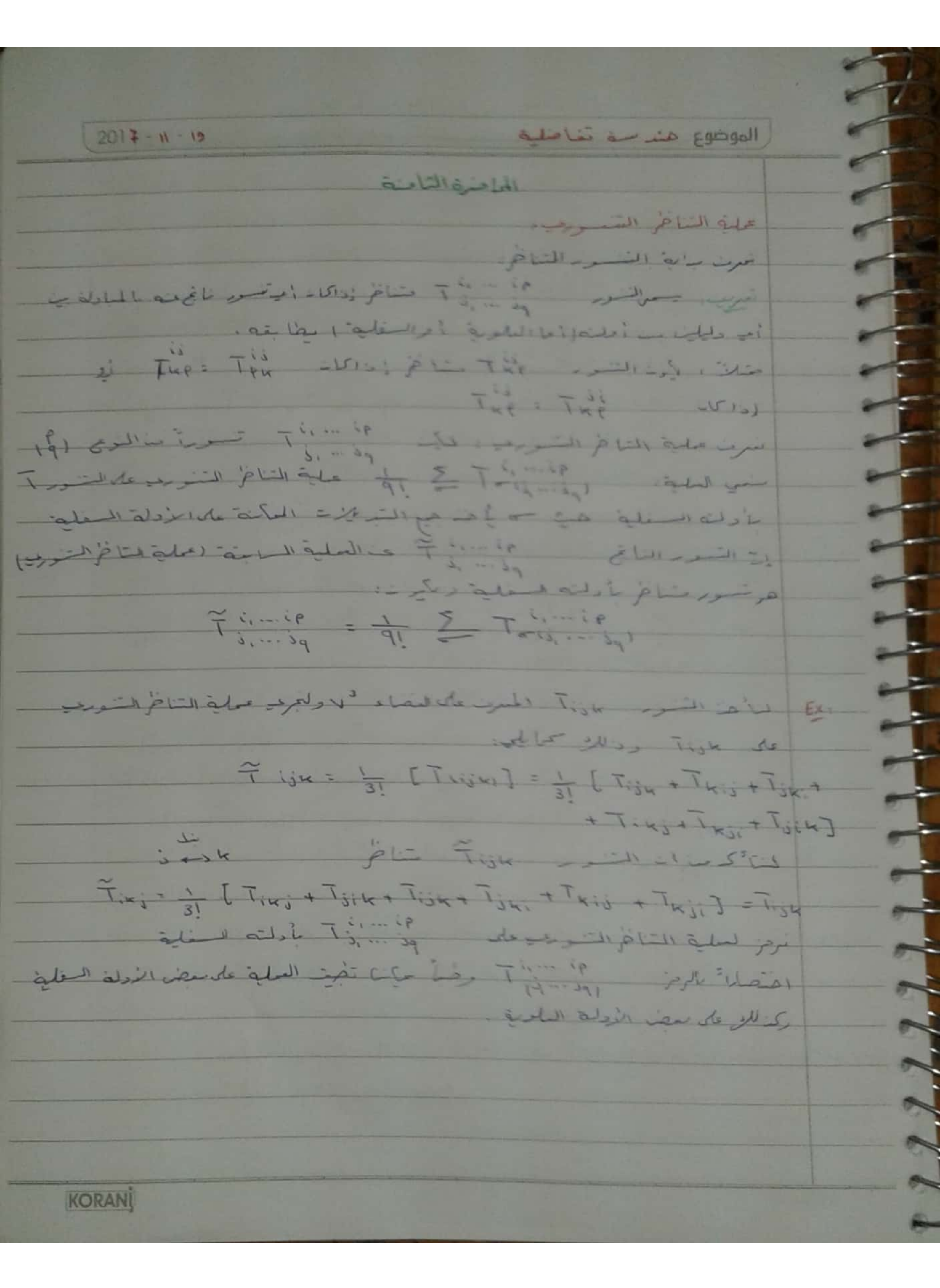


المحاضرة الثامنة

عملية التناظر التشويشي

تعريف بدالة التنسور المتناظر

تعريف: يسمى التنسور $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ متناظر إذا كان أي تنسور ناتج عنه بالمبادلة بين أي دليلين من أدلته إما العلوية أو السفلية يطابقه.

مثال: يكون التنسور T^{ij}_{kl} متناظر إذا كان $T^{ij}_{kl} = T^{ij}_{lk}$ أو إذا كان $T^{ij}_{kl} = T^{ji}_{kl}$

نعرف عملية التناظر التشويشي كالآتي: ليكن $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ تنسورًا من النوع $\binom{p}{q}$ نسمي العملية $\frac{1}{q!} \sum T^{i_1 \dots i_p}_{\sigma(j_1 \dots j_q)}$ عملية التناظر التشويشي على التنسور T بأدلته السفلية حيث σ أخذ جميع التباديل الممكنة على الأدلة السفلية.

إن التنسور الناتج $\tilde{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ عن العملية السابقة (عملية التناظر التشويشي) هو تنسور متناظر بأدلته السفلية ونكتب:

$$\tilde{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \frac{1}{q!} \sum T^{i_1 \dots i_p}_{\sigma(j_1 \dots j_q)}$$

Ex: لنأخذ التنسور T_{ijk} المعرف على الفضاء V^3 ولنجري عملية التناظر التشويشي على T_{ijk} وذلك كما يلي:

$$\tilde{T}_{ijk} = \frac{1}{3!} [T_{\sigma(ijk)}] = \frac{1}{3!} [T_{ijk} + T_{kij} + T_{jki} + T_{ikj} + T_{kji} + T_{jik}]$$

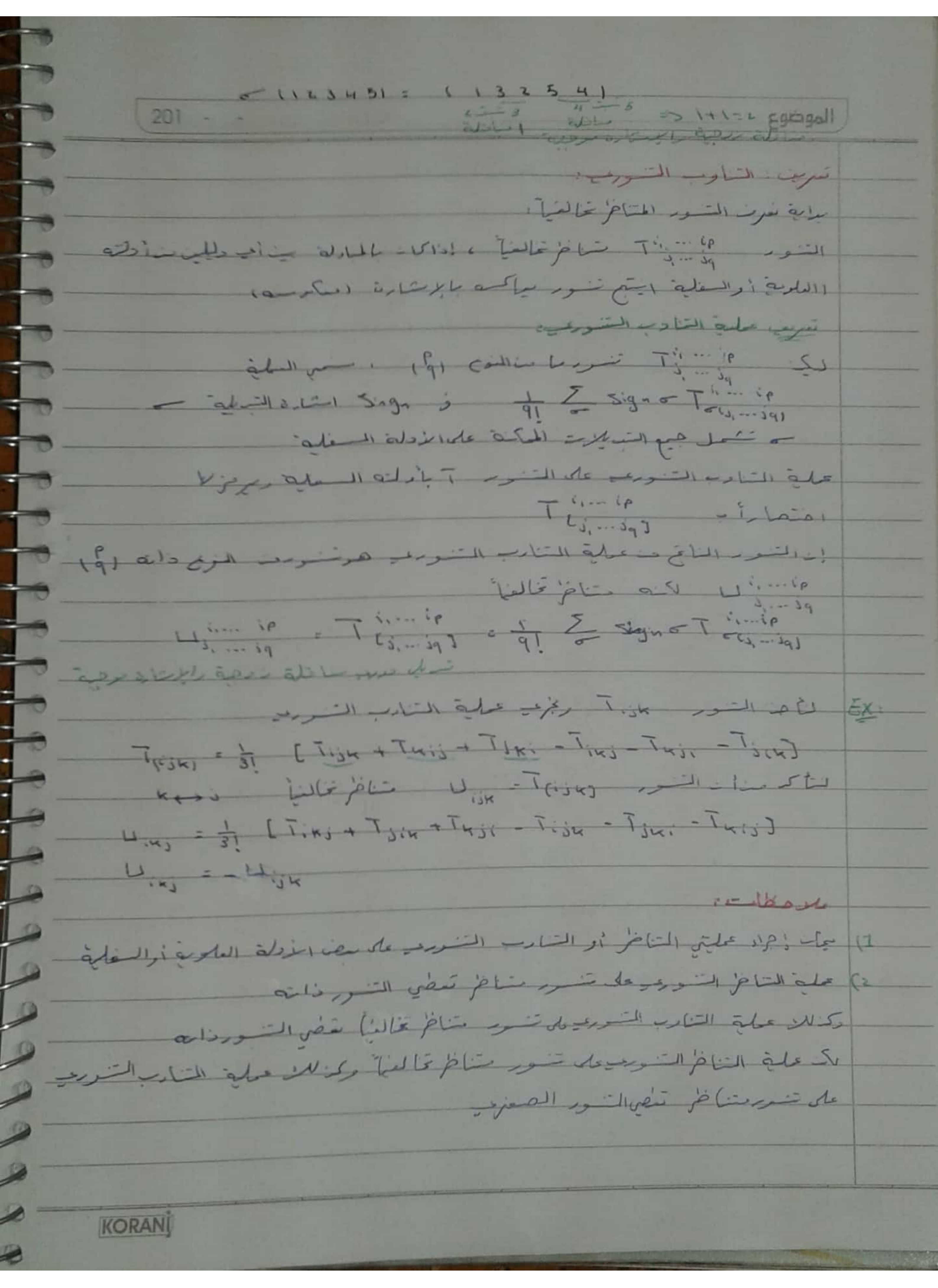
لنتأكد من أن التنسور $\tilde{T}_{ijk}$ متناظر

نبدل $j \leftrightarrow k$

$$\tilde{T}_{ikj} = \frac{1}{3!} [T_{ikj} + T_{jik} + T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} + T_{kji}] = \tilde{T}_{ijk}$$

نرمز لعملية التناظر التشويشي على $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ بأدلته السفلية اختصارًا بالرمز $T^{i_1 \dots i_p}_{(j_1 \dots j_q)}$ ويمكن أن تجري العملية على بعض الأدلة السفلية وكذلك على بعض الأدلة العلوية.

KORANI



$\sigma(12345) = (13254)$

تعريف التناوب التنسوري:

بداية نعرف التنسور المتناظر تخالفياً:

التنسور $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ متناظر تخالفياً ، إذا كان بالمبادلة بين أي دليلين من أدلته العلوية أو السفلية ينتج تنسور يعاكسه بالإشارة (معاكس له)

تعريف عملية التناوب التنسوري:

ليكن $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ تنسور ما من النوع $\binom{p}{q}$ ، نسمي العملية

$$\frac{1}{q!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma \, T^{i_1\dots i_p}_{\sigma(j_1\dots j_q)}$$

و sign إشارة التبديلة σ

σ تشمل جميع التبديلات الممكنة على الأدلة السفلية:

عملية التناوب التنسوري على التنسور T بأدلته السفلية ويرمز لها اختصاراً ب $T^{i_1\dots i_p}_{[j_1\dots j_q]}$

إن التنسور الناتج من عملية التناوب التنسوري هو تنسور من النوع ذاته $\binom{p}{q}$

$L^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ لأنه متناظر تخالفياً

$$L^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{[j_1\dots j_q]} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma \, T^{i_1\dots i_p}_{\sigma(j_1\dots j_q)}$$

عدد مبادلات زوجية بالإشارة موجبة

Ex: لنأخذ التنسور T_{ijk} ونجري عملية التناوب التنسوري

$$T_{[ijk]} = \frac{1}{3!}\left[T_{ijk} + T_{kij} + T_{jki} - T_{ikj} - T_{kji} - T_{jik}\right]$$

لنتأكد من أن التنسور $L_{ijk} = T_{[ijk]}$ متناظر تخالفياً ن $k \leftrightarrow j$

$$L_{ikj} = \frac{1}{3!}\left[T_{ikj} + T_{jik} + T_{kji} - T_{ijk} - T_{jki} - T_{kij}\right]$$

$$L_{ikj} = -L_{ijk}$$

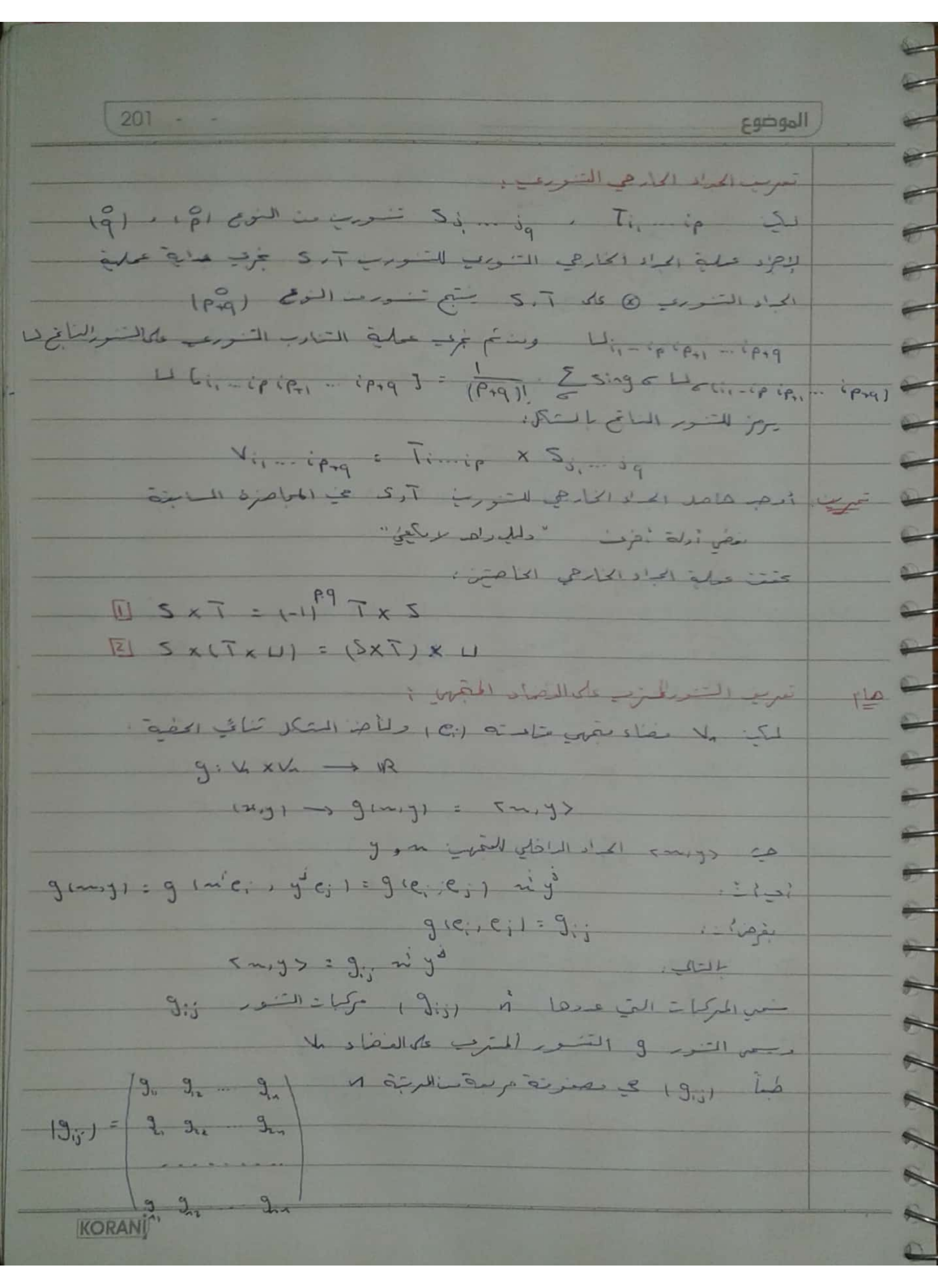
ملاحظات:

1) يمكن إجراء عمليتي التناظر أو التناوب التنسوري على بعض الأدلة العلوية أو السفلية

2) عملية التناظر التنسوري على تنسور متناظر تعطي التنسور ذاته

وكذلك عملية التناوب التنسوري على تنسور متناظر تخالفياً تعطي التنسور ذاته

لكن عملية التناظر التنسوري على تنسور متناظر تخالفياً وكذلك عملية التناوب التنسوري على تنسور متناظر تعطي التنسور الصفري



تعريف الجداء الخارجي التنسوري:

ليكن $T_{i_1 \dots i_p}$ ، $S_{j_1 \dots j_q}$ تنسوريين من النوع $(\overset{0}{p})$ ، $(\overset{0}{q})$

لإيجاد عملية الجداء الخارجي التنسوري للتنسورين T ، S نجري عملية عملية الجداء التنسوري ⊗ على T ، S ينتج تنسور من النوع $(\overset{0}{p+q})$

$U_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}}$ ومن ثم نجري عملية التناوب التنسوري على التنسور الناتج U

$$U_{[i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q}]} = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}\sigma \, U_{\sigma(i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+q})}$$

يرمز للتنسور الناتج بالشكل:

$$V_{i_1 \dots i_{p+q}} = T_{i_1 \dots i_p} \times S_{j_1 \dots j_q}$$

تمرين: أوجد حاصل الجداء الخارجي للتنسورين T ، S في المحاضرة السابقة

بعض أدلة تجريب "دليل دلتا كرونيكر"

تحقق عملية الجداء الخارجي الخاصتين:

1. $S \times T = (-1)^{pq} \, T \times S$
2. $S \times (T \times U) = (S \times T) \times U$

هام: تعريف التنسور المتري على الفضاء المتجهي:

ليكن V_n فضاء متجهي قاعدته (e_i) ولنأخذ الشكل ثنائي الخطية

$$g : V_n \times V_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longrightarrow g(x,y) = \langle x,y \rangle$$

حيث $\langle x,y \rangle$ الجداء الداخلي للمتجهين x و y

أي أن: $g(x,y) = g(x^i e_i , y^j e_j) = g(e_i , e_j) \, x^i y^j$

بفرض أن: $g(e_i , e_j) = g_{ij}$

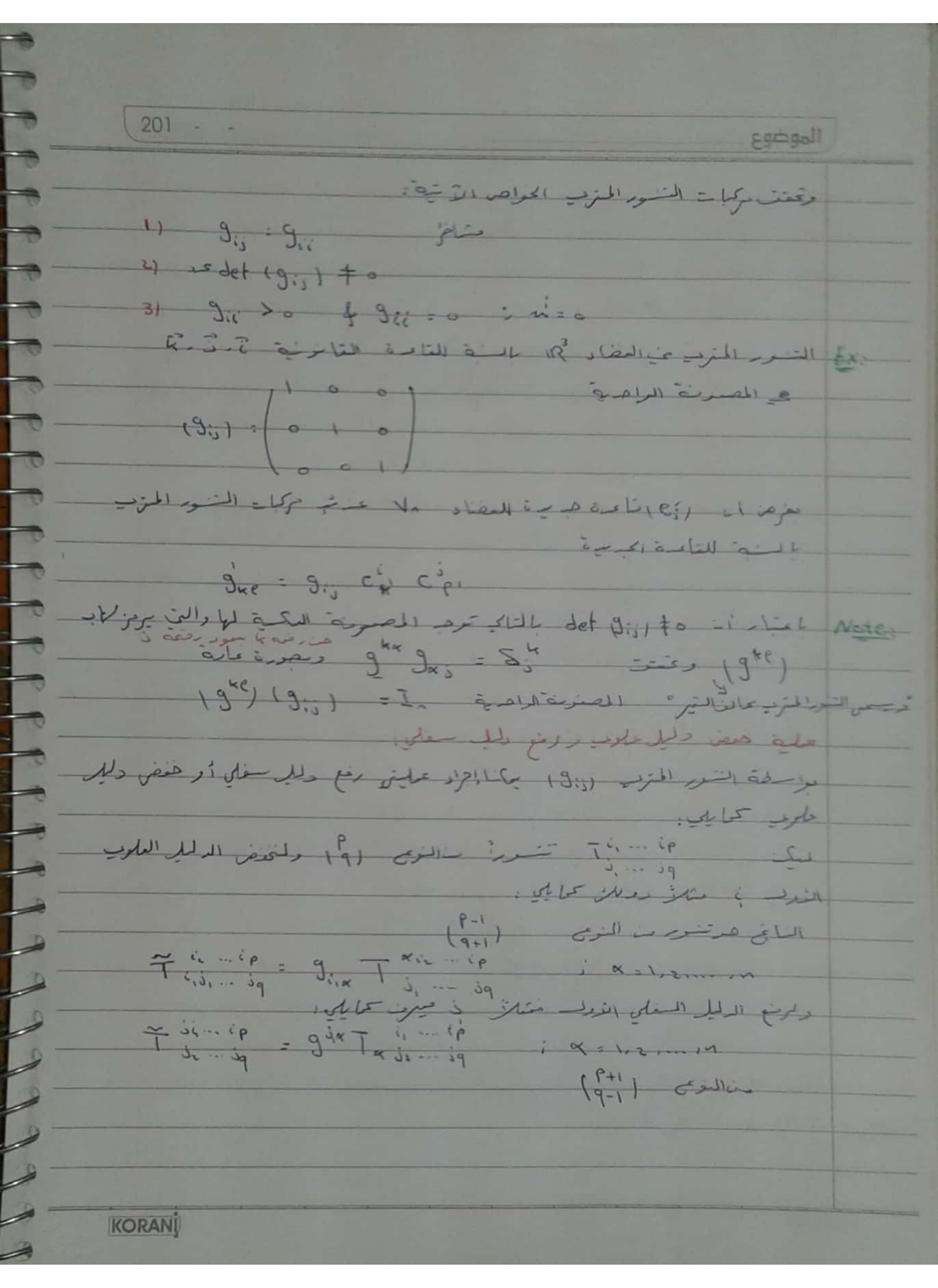
بالتالي: $\langle x,y \rangle = g_{ij} \, x^i y^j$

تسمى المركبات التي عددها n^2 (g_{ij}) مركبات التنسور g_{ij}

ويسمى التنسور g التنسور المتري على الفضاء V_n

طبعاً (g_{ij}) هي مصفوفة مربعة من المرتبة n

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$



وتحقق مركبات التنسور المتري الخواص الآتية:

1) $g_{ij} = g_{ji}$ متماثل

2) $\det(g_{ij}) \neq 0$

3) $g_{ii} > 0$ & $g_{ij} = 0 \; ; \; i \neq j$

Ex: التنسور المتري في الفضاء R^3 بالنسبة للقاعدة الكارتيزية $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ هي المصفوفة الواحدية

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نفرض أن (e_i) قاعدة جديدة للفضاء فإن عناصر مركبات التنسور المتري بالنسبة للقاعدة الجديدة

$$g'_{k\ell} = g_{ij}\, c^i_k\, c^j_\ell$$

Note: باعتبار أن $\det(g_{ij}) \neq 0$ بالتالي توجد المصفوفة العكسية لها والتي يرمز لها بـ $(g^{k\ell})$ وتحقق $g^{k\alpha} g_{\alpha j} = \delta^k_j$ وبصورة عامة

$$(g^{k\ell})(g_{ij}) = I_n$$

المصفوفة الواحدية. ويسمى التنسور المتري عكسي التغير.

عملية خفض دليل علوي ورفع دليل سفلي:

بواسطة التنسور المتري (g_{ij}) يمكن إجراء عمليتي رفع دليل سفلي أو خفض دليل علوي كما يلي:

ليكن $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ تنسوراً من النوع $\binom{p}{q}$ ولنخفض الدليل العلوي الأول i_1 مثلاً وذلك كما يلي:

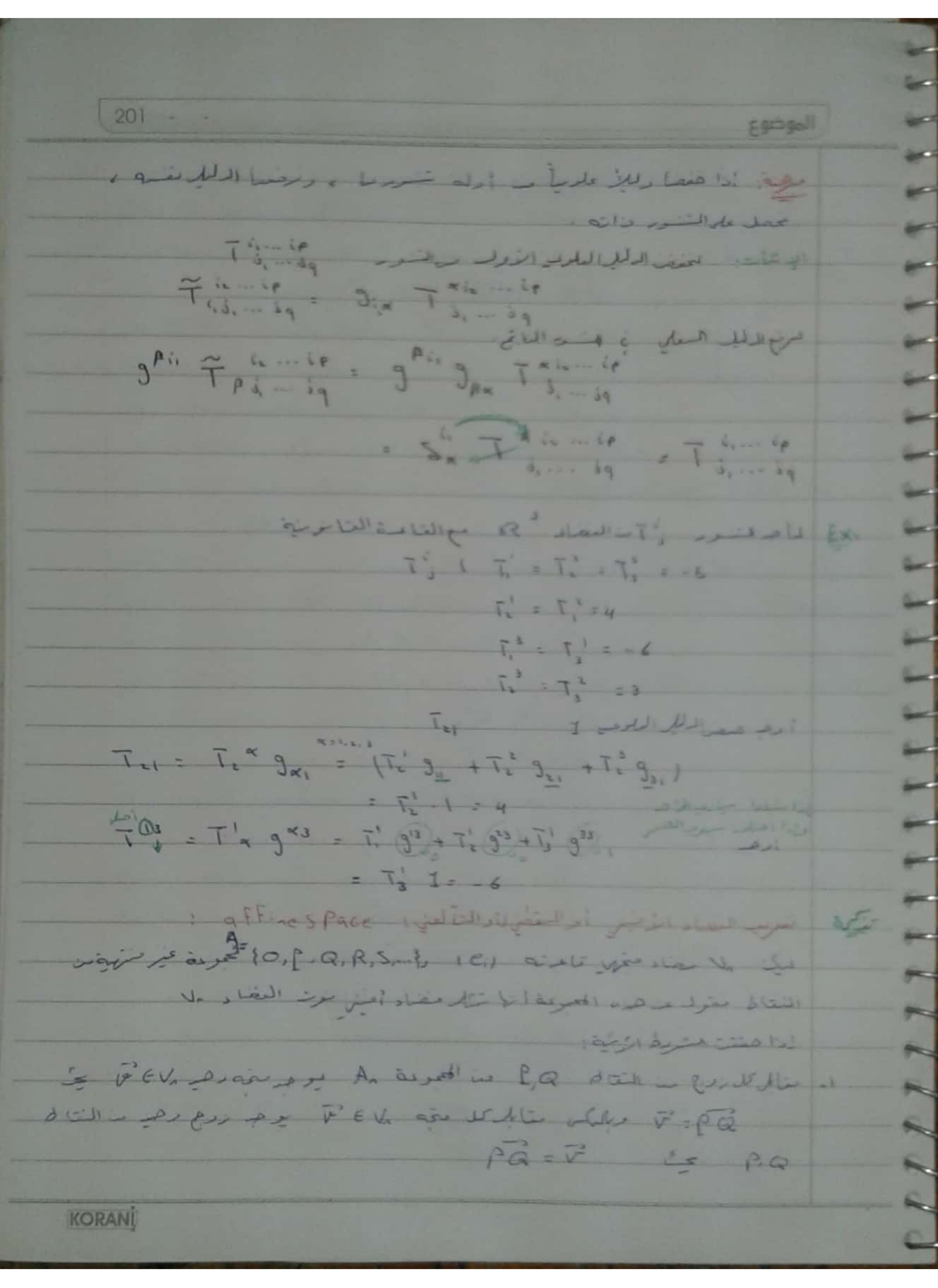
الناتج هو تنسور من النوع $\binom{p-1}{q+1}$

$$\tilde{T}^{i_2 \dots i_p}_{i_1 j_1 \dots j_q} = g_{i_1 \alpha}\, T^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \; ; \; \alpha = 1, 2, \dots, n$$

ولرفع الدليل السفلي الأول مثلاً j_1 نجري كما يلي:

$$\tilde{T}^{j_1 i_1 \dots i_p}_{j_2 \dots j_q} = g^{j_1 \alpha}\, T^{i_1 \dots i_p}_{\alpha j_2 \dots j_q} \; ; \; \alpha = 1, 2, \dots, n$$

من النوع $\binom{p+1}{q-1}$



ملاحظة: إذا خفضنا دليلاً علوياً من أدلة تنسور ما، ورفعنا الدليل نفسه، نحصل على التنسور ذاته.

البرهان: نخفض الدليل العلوي الأول من التنسور $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$

$$\tilde{T}^{i_2 \dots i_p}_{i_1 j_1 \dots j_q} = g_{i_1 \alpha} T^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

نرفع الدليل السفلي في هذا الناتج

$$g^{\beta i_1} \tilde{T}^{i_2 \dots i_p}_{\beta j_1 \dots j_q} = g^{\beta i_1} g_{\beta \alpha} T^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

$$= \delta^{i_1}_{\alpha} T^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

Ex: لنأخذ التنسور T^i_j في الفضاء R^3 مع القاعدة القانونية

T^i_j ؛ $T^1_1 = T^2_2 + T^3_3 = -6$

$T^1_2 = T^2_1 = 4$

$T^3_1 = T^1_3 = -6$

$T^3_2 = T^2_3 = 3$

أوجد خفض الدليل العلوي T_{21}

$$T_{21} = T_2^{\alpha} g_{\alpha 1} \overset{\alpha = 1,2,3}{=} (T_2^1 g_{11} + T_2^2 g_{21} + T_2^3 g_{31})$$

$$= T^1_2 \cdot 1 = 4$$

$$T^{13} = T^1_{\alpha} g^{\alpha 3} = T^1_1 g^{13} + T^1_2 g^{23} + T^1_3 g^{33}$$

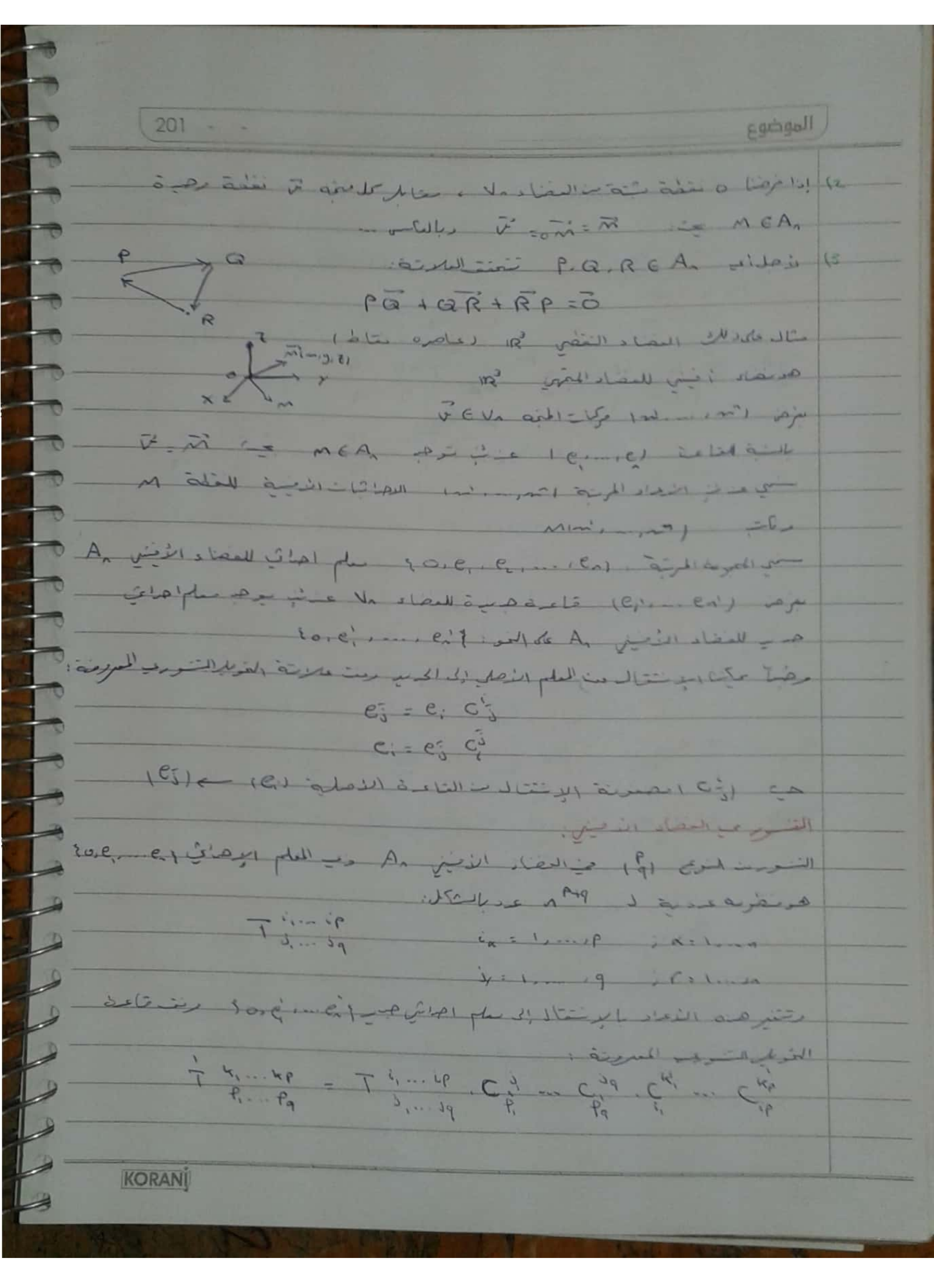
$$= T^1_3 \cdot 1 = -6$$

إذا رفعنا ... أوجد

تذكرة: تعريف الفضاء الأفيني أو الفضاء النقطي التآلفي affine space :

ليكن V_n فضاء متجهي قاعدته (e_i)، $A = \{O, P, Q, R, S, \dots\}$ مجموعة غير منتهية من النقاط نقول عن هذه المجموعة إنها تشكل فضاء أفيني مرتبط بالفضاء V_n إذا حققت الشروط الآتية:

1. يقابل كل زوج من النقاط P, Q من المجموعة A_n يوجد متجه وحيد $\vec{u} \in V_n$ بحيث $\vec{v} = \vec{PQ}$ وبالعكس يقابل كل متجه $\vec{v} \in V_n$ يوجد زوج وحيد من النقاط P, Q بحيث $\vec{PQ} = \vec{v}$



2) إذا فرضنا O نقطة ثابتة من الفضاء A_n ، يقابل كل متجه $\vec{v}$ نقطة وحيدة $M \in A_n$ حيث $\vec{v} = \vec{OM} = \vec{m}$ وبالعكس ...

3) من أجل أي $P, Q, R \in A_n$ تتحقق العلاقة:

$$\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RP} = \vec{O}$$

مثال على ذلك الفضاء النقطي $\mathbb{R}^3$ (عناصره نقاط) هو فضاء أفيني للفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$

نفرض $(v^1, \dots, v^n)$ مركبات المتجه $\vec{v} \in V_n$ بالنسبة للقاعدة $\{e_1, \dots, e_n\}$ عندئذ نرى من أجل $M \in A_n$ حيث $\vec{m} = \vec{v}$ تسمى عندئذ الأعداد المرتبة $(v^1, \dots, v^n)$ الإحداثيات الأفينية للنقطة M ونكتب $M(v^1, \dots, v^n)$

تسمى المجموعة المرتبة $\{O, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ معلم إحداثي للفضاء الأفيني A_n

نفرض $(e_{1'}, \dots, e_{n'})$ قاعدة جديدة للفضاء V_n عندئذ يوجد معلم إحداثي جديد للفضاء الأفيني A_n على الشكل $\{O, e_{1'}, \dots, e_{n'}\}$

وأيضاً يمكننا الانتقال من المعلم الأصلي إلى الجديد وفق علاقة التحويل التنسوري المعروفة:

$$e_{j'} = e_i C^i_{j'}$$

$$e_i = e_{j'} C^{j'}_i$$

حيث $C^i_{j'}$ المصفوفة الانتقال من القاعدة الأصلية $(e_i) \to (e_{j'})$

التنسور في الفضاء الأفيني:

التنسور المزدوج $\binom{p}{q}$ في الفضاء الأفيني A_n وفي المعلم الإحداثي $\{O, e_1, \dots, e_n\}$ هو منظومة عددية لـ n^{p+q} عدداً بالشكل:

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

$i_\alpha = 1, \dots, n$; $\alpha = 1, \dots, p$

$j_\beta = 1, \dots, n$; $\beta = 1, \dots, q$

وتتغير هذه الأعداد بالانتقال إلى معلم إحداثي جديد $\{O, e_{1'}, \dots, e_{n'}\}$ وفق قاعدة التحويل التنسوري المعروفة:

$$T'^{k_1 \dots k_p}_{p_1 \dots p_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \cdot C^{j_1}_{p_1} \dots C^{j_q}_{p_q} \cdot C^{k_1}_{i_1} \dots C^{k_p}_{i_p}$$

الإحداثيات المنحنية:

لتكن A_n فضاء أفيني، X نطاقاً ما فيه معرفاً عليه الإحداثيات الأفينية $(x^1,\dots,x^n)$ معرفة الدالة:

$$y^i : X \to Y$$

$$(x^1,\dots,x^n) \to y^i(x^1,\dots,x^n) = (y^1,\dots,y^n)$$

حيث Y نطاقاً آخر من A_n

نقول ملساء من الدرجة k إذا كانت تقابل مستمر من X على Y ومقابلة للاشتقاق حتى المرتبة k ونرمز لذلك $y^i \in C^k$ (معكوسها دالة ملساء)

تعريف الإحداثيات المنحنية:

نفرض $y^1, y^2, \dots, y^n$ دوال ملساء من النطاق X في النطاق Y

$$y^i : X \to Y$$

$$i = 1,\dots,n \;;\; (x^1,\dots,x^n) \to y^i(x^1,\dots,x^n)$$

نقول عن الدوال $y^1,\dots,y^n$ أنها تشكل إحداثيات منحنية في النطاق X إلى Y إذا حققت الشرط $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$ حيث المصفوفة اليعقوبية للاشتقاق من الإحداثيات من X إلى Y

بمعنى أنه نقول عن الدوال $y^1,\dots,y^n$ أنها تشكل إحداثيات منحنية من X إلى Y إذا كانت كل منها دالة تقابل مستمر وقابلة للاشتقاقات حتى المرتبة k ويحدد المصفوفة $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$ وذلك في كل نقطة من نقاط النطاق X

Ex: لنأخذ في النطاق الموجب من $\mathbb{R}^3$: $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x,y,z > 0\}$

الدوال: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ، $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ ، $z = z$

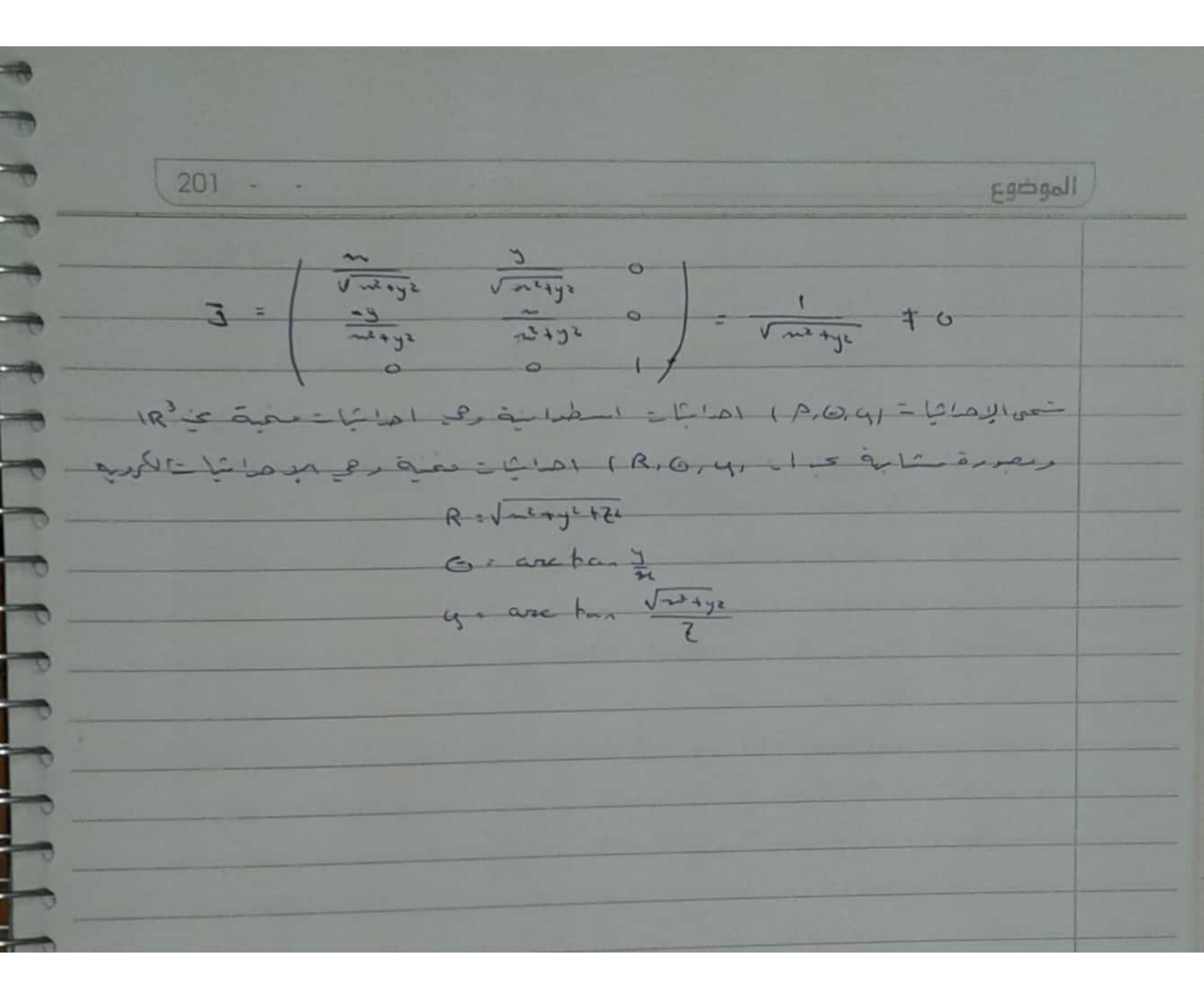
عندئذ تشكل هذه الدوال إحداثيات منحنية من النطاق X على النطاق Y

$$Y = \{(\rho,\theta,z) \,;\, \rho>0 ,\; 0<\theta<\frac{\pi}{2} ,\; z>0\}$$

نلاحظ أن الدوال ρ, θ, z دوال ملساء

وأن:

$$\det\left(\frac{\rho,\theta,z}{x,y,z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} =$$



$$J = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$$

تسمى الإحداثيات (ρ, θ, φ) الإحداثيات اسطوانية وهي احداثيات منحنية في IR^3

وبصورة مشابهة نعرف الإحداثيات (R, θ, φ) احداثيات منحنية وهي الإحداثيات الكروية

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$